Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna

Wykład 3

dr Tomasz Wójtowicz

WZ AGH, Kraków

DEFINICJA

Wartością oczekiwana zmiennej losowej X nazywamy wyrażenia:

$$EX = \begin{cases} \sum x_i \cdot p_i & \text{gdy X jest typu skokowego} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx & \text{gdy X jest typu ciąiągłe} \end{cases}$$

UWAGA

Istnieją zmienne losowe, które nie posiadają wartości oczekiwanej lub posiadają nieskończoną wartość oczekiwaną.

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

DEFINICJA

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy wyrażenie

$$D^2(X) = E\left(X - EX\right)^2$$

miara zróżnicowania wartości przyjmowanych przez zmienną losową

Wariancję można obliczyć następująco:

$$D^2(X) = \begin{cases} \sum (x_i - EX)^2 \cdot p_i & \text{gdy } X \text{ jest typu skokowego} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \cdot f(x)dx & \text{gdy } X \text{ jest typu ciągłego} \end{cases}$$

UWAGA

Wariancję można obliczyć ze wzoru:

$$D^2(X) = E\left(X^2\right) - \left(EX\right)^2$$

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

Własności

- $D^2(c) = 0$
- $D^2(X+b) = D^2 X$
- $D^2(a \cdot X) = a^2 \cdot D^2 X$
- jeżeli $Y = \dfrac{X}{\sqrt{D^2(X)}}$ to $D^2(Y) = 1$

Jeżeli X i Y są zmiennymi losowymi **niezależnymi**, to:

- $D^2(X+Y) = D^2 X + D^2 Y$
- $D^2(X-Y) = D^2 X + D^2 Y$

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

Definicja

Momentem zwykłym (momentem) rzędu *k* (*k*=1,2,...) zmiennej losowej X nazywamy

$$m_k = E(X^k) = \begin{cases} \sum x_i^k \cdot p_i & \text{gdy } X \text{ – zm. los. skokowa} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)dx & \text{gdy } X \text{ – zm. los. ciągła} \end{cases}$$

Wartość oczekiwana – moment zwykły rzędu 1

Definicja

Momentem centralnym rzędu *k* (*k*=1,2,...) zmiennej losowej X nazywamy

$$\mu_k = E(X - EX)^k = \begin{cases} \sum (x_i - EX)^k \cdot p_i & \text{gdy X – zm. los. skokowa} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^k \cdot f(x)dx & \text{gdy X – zm. los. ciągła} \end{cases}$$

$\mu_2 = E(X - EX)^2$ moment centralny rzędu 2 – wariancja

$$\mu_1 = E(X - EX) = 0$$

Definicja

Współczynnikiem skośności rozkładu zmiennej losowej X nazywamy wyrażenie:

$$SK = \frac{\mu_3}{\left(D^2(X)\right)^{3/2}} = \frac{E\left(X - EX\right)^3}{\left(D^2(X)\right)^{3/2}}$$

Uwaga

$SK>0$ – skośność prawostronna (długi prawy ogon rozkładu)

$SK<0$ - skośność lewostronna (długi lewy ogon rozkładu)

Definicja

Medianą zmiennej losowej X nazywamy taką wartość Me spełniającą nierówności:

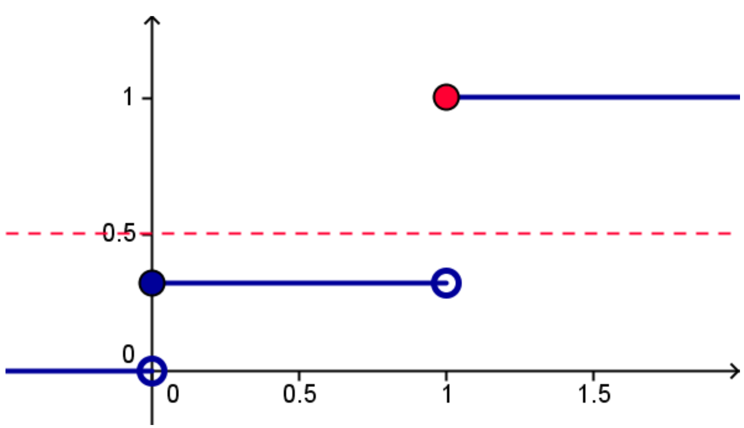
$$P(X \le Me) \ge \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad P(X \ge Me) \ge \frac{1}{2}$$

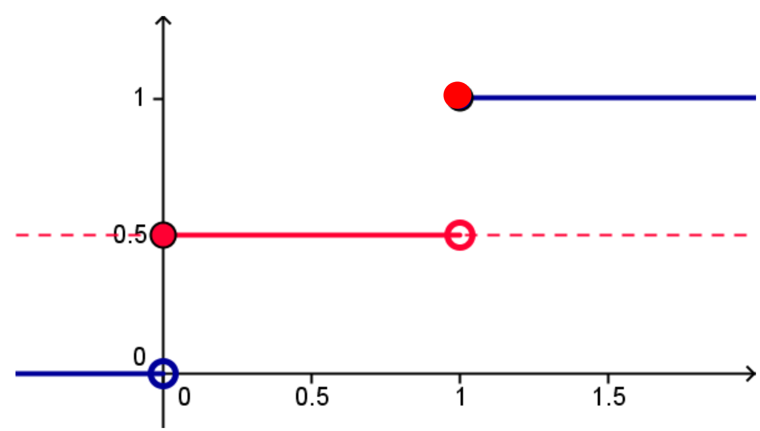
Uwaga

$$\frac{1}{2} \le F(Me) \le P(X = Me) + \frac{1}{2}$$

Przykłady

X- zmienna losowa a rozkładzie zero-jedynkowym





Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

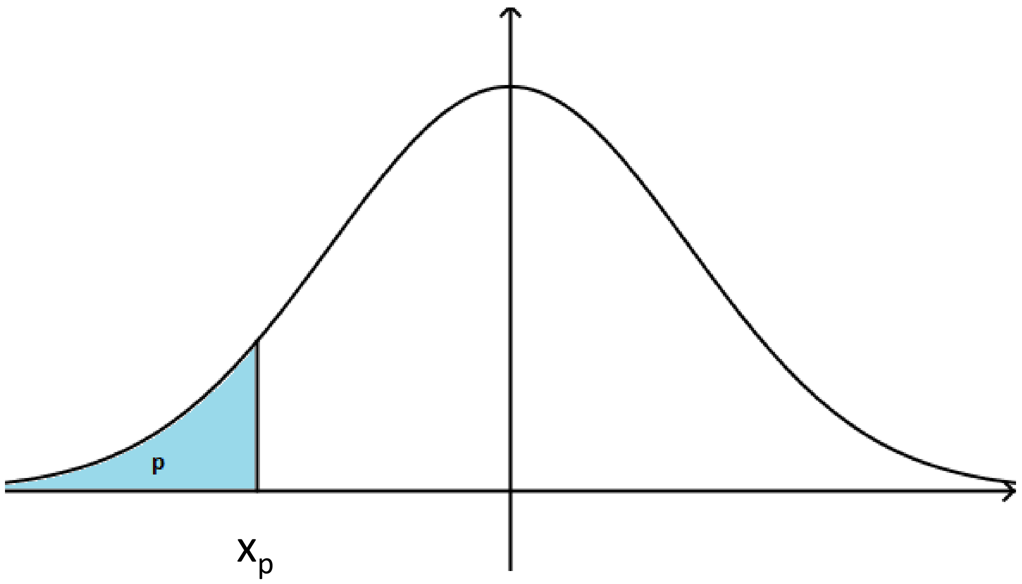
DEFINICJA

Kwantylem rzędu *p* (0<p<1) zmiennej losowej X nazywamy taką wartość x_p spełniającą nierówności:

$$P(X \le x_p) \ge p \quad \text{i} \quad P(X \ge x_p) \ge 1 - p$$

UWAGA

$$p \le F(x_p) \le P(X = x_p) + p$$



Wielowymiarowe zmienne losowe

Definicja

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych.

Niech X_i dla i=1,...,n będą zmiennymi losowymi. Zestawienie n funkcji:

$$\left(X_1, X_2, ..., X_n\right): \Omega \ni \omega \mapsto \left(x_1, ..., x_n\right) \in R^n$$

nazywamy **zmienną losową n-wymiarową (n-wymiarowym wektorem losowym)**.

Uwaga

W zastosowaniach praktycznych najczęściej spotyka się zmienne losowe

2-wymiarowe:

$$\left(X, Y\right): \Omega \ni \omega \mapsto \left(x, y\right) \in R^2$$

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

Definicja

Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) jest **typu skokowego**, jeżeli przyjmuje skończoną lub co najwyżej przeliczalną liczbę wartości (x_i, y_j) dla i,j=1,2,...

Uwaga

(X, Y) zm. losowa skokowa $\Leftrightarrow$ X, Y są zm. losowymi skokowymi

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

Przykład

rzut ośmiościenną kostką

X = „reszta z dzielenia wyrzuconej liczby przez 2”

Y = „reszta z dzielenia wyrzuconej liczby przez 3”

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zbiór wartości } X = \{0, 1\} \\ \text{Zbiór wartości } Y = \{0, 1, 2\}\end{array}\right\} \text{ zmienne losowe skokowe}$$

Zbiór wartości (X,Y) = {(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)}

		y_i		
		0	1	2
x_i	0	(0,0)	(0,1)	(0,2)
	1	(1,0)	(1,1)	(1,2)

Jaki rozkład ma zmienna losowa (X,Y)?

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

Definicja

Funkcją prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X,Y) typu skokowego przyjmującej wartości (x_i,y_j) dla i,j=1,2,... nazywamy

$$P:(x_i,y_j)\mapsto p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$$

Uwaga

Prawdopodobieństwa p_{ij} mają następujące własności:

$$p_{ij}\geq 0$$

$$\sum_i\sum_j p_{ij}=1$$

Przykład

rzut ośmiościenną kostką

X = „reszta z dzielenia wyrzuconej liczby przez 2"

Y = „reszta z dzielenia wyrzuconej liczby przez 3"

wyrzucona liczba	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
wartość (X,Y)	(1,1)	(0,2)	(1,0)	(0,1)	(1,2)	(0,0)	(1,1)	(0,2)

Rozkład zmiennej losowej (X,Y):

		y_j		
		0	**1**	**2**
x_i	**0**	1/8	1/8	1/4
	1	1/8	1/4	1/8

Czy, i ewentualnie w jaki sposób, rozkład zmiennej losowej (X,Y) zależy od rozkładów zmiennych losowych X i Y?

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

X – zm. los. o wartościach $x_1, \ldots, x_n$

Y – zm. los. o wartościach $y_1, \ldots, y_m$

(X,Y) – zm. los. o wartościach (x_i,y_j) dla $i=1,2,\ldots,n$ oraz $j=1,2,\ldots,m$.

Rozkład zmiennej losowej (X,Y): $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$

		wartości zmiennej Y				
		y_1	y_2	...	y_m	
wartości zmiennej X	x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	$p_{1.}$
	x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	$p_{2.}$
	...					
	x_n	P_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}	$p_{n.}$
		$p_{.1}$	$p_{.2}$		$p_{.m}$	1

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$$

$$p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$

Wtedy:

$\sum_{j=1}^{m} p_{\bullet j} = 1$ $\sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} = 1$ czyli są rozkładami

$p_{i\bullet} = P(X = x_i)$ $p_{\bullet j} = P(Y = y_j)$

Czyli $p_{i\bullet}$ – rozkład X, $p_{\bullet J}$ – rozkład Y

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

DEFINICJA

Jeżeli (X,Y) jest zmienną losową dwuwymiarową skokową o rozkładzie p_{ij}, to

$$p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$$ stanowi rozkład zmiennej losowej X,

$$p_{\bullet j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$ stanowi rozkład zmiennej losowej Y.

UWAGA

Rozkłady $p_{i\bullet}$ i $p_{\bullet j}$ nazywamy **rozkładami brzegowymi** zmiennej losowej (X,Y)

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

Przykład

rzut ośmiościenną kostką

X = „reszta z dzielenia wyrzuconej liczby przez 2”

Y = „reszta z dzielenia wyrzuconej liczby przez 3”

wyrzucona liczba	1	2	3	4	5	6	7	8
Wartości X	1	0	1	0	1	0	1	0
Wartości Y	1	2	0	1	2	0	1	2

x_i	0	1
p_i	1/2	1/2

y_j	0	1	2
p_j	1/4	3/8	3/8

Rozkład zmiennej losowej (X,Y):

		y_j			
		0	1	2	
x_i	0	1/8	1/8	1/4	**1/2**
	1	1/8	1/4	1/8	**1/2**
		1/4	**3/8**	**3/8**	

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

DEFINICJA

Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową typu skokowego

przyjmującą wartości (x_i,y_j) (i=1,...,n, j=1,...,m) z prawdopodobieństwem p_{ij}

Dla ustalonego y_j prawdopodobieństwa:

$$P\left(X = x_i \mid Y = y_j\right) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,n$$

są wartościami funkcji prawdopodobieństwa warunkowego rozkładu zmiennej losowej X pod warunkiem, że zmienna losowa Y przyjmuje wartość y_j.

Natomiast dla ustalonego x_i prawdopodobieństwa:

$$P\left(Y = y_j \mid X = x_i\right) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \qquad \text{dla } j=1,2,\ldots,m$$

są wartościami funkcji prawdopodobieństwa warunkowego rozkładu zmiennej losowej Y pod warunkiem, że zmienne losowa X przyjmuje wartość x_i .

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

Definicja

Dystrybuantą F(x,y) dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y) nazywamy funkcję

$$F : R^2 \ni (x,y) \mapsto F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) \in R$$

Uwaga

Jeżeli (X,Y) jest zmienną losową skokową, to wówczas dystrybuanta ma postać:

$$F(x,y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$$

		y_j		
		0	1	2
x_i	0	1/8	1/8	1/4
	1	1/8	1/4	1/8

	$(-\infty,0)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,+\infty)$
$(-\infty,0)$	0	0	0	0
$[0,1)$	0	1/8	1/4	1/2
$[1,+\infty)$	0	1/4	5/8	1

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

ZMIENNE LOSOWE NIEZALEŻNE

DEFINICJA

Zdarzenia A i B są niezależne jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

UWAGA

W przypadku, gdy P(A)>0 i P(B)>0, warunek ten jest równoważny każdemu z dwóch poniższych warunków dotyczących prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$P(B \mid A) = P(B)$$

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

DEFINICJA

Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową typu skokowego. Zmienne losowe X i Y są niezależne jeżeli

$$\forall(x_i, y_j) \quad P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

UWAGA

Powyższy warunek można zapisać używając rozkładów brzegowych:

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$$

		Y				
		y_1	y_2	…	y_m	
X	x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	**$p_{1\bullet}$**
	x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	**$p_{2\bullet}$**
	…					
	x_n	P_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	**$p_{n\bullet}$**
		$p_{\bullet 1}$	**$P_{\bullet 2}$**		**$p_{\bullet m}$**	

UWAGA

Jeżeli zmienne losowe X i Y są niezależne, to :

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}}{p_{\bullet j}} = p_{i\bullet} = P(X = x_i)$$

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = P(Y = y_j)$$

		Y				
		y_1	y_2	…	y_m	
X	x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	$\mathbf{p_{1\bullet}}$
	x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	$\mathbf{p_{2\bullet}}$
	…					
	x_n	P_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	$\mathbf{p_{n\bullet}}$
		$\mathbf{p_{\bullet 1}}$	$\mathbf{P_{\bullet 2}}$		$\mathbf{p_{\bullet m}}$	

czyli rozkłady warunkowe zmiennych losowych X i Y nie zależą od warunku.

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

PRZYKŁAD

rzut ośmiościenną kostką

X = „reszta z dzielenia wyrzuconej liczby przez 2”

Y = „reszta z dzielenia wyrzuconej liczby przez 3”

CZY ZMIENNE LOSOWE X I Y SĄ NIEZALEŻNE?

		y_i			
		0	1	2	
x_i	0	1/8	1/8	1/4	1/2
	1	1/8	1/4	**1/8**	**1/2**
		1/4	3/8	**3/8**	

Zmienne losowe X i Y nie są niezależne

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

Przykład

rzut ośmiościenną kostką

X = „reszta z dzielenia wyrzuconej liczby przez 2”

Y = „reszta z dzielenia wyrzuconej liczby przez 3”

CZY ZMIENNE LOSOWE X I Y SĄ NIEZALEŻNE?

		y_j			
		0	1	2	
x_i	0	1/8	1/8	1/4	1/2
				1/8	**1/2**
				3/8	

Ile wynosi E(XY)?

$x_i\, y_j$	0	1	2
p_j	5/8	1/4	1/8

$$E(XY) = 0 \cdot \frac{5}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Zmienne losowe X i Y nie są niezależne

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{8} \qquad E(X) \cdot E(Y) = \frac{9}{16}$$

DEFINICJA

Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) jest typu ciągłego, jeżeli zmienne losowe X i Y są typu ciągłego.

DEFINICJA

Jeżeli (X,Y) jest dwuwymiarową zmienną losową ciągłą, to funkcję f nazywamy **gęstością rozkładu** zmiennej (X,Y) jeżeli

$$P(X \in (a,b], Y \in (c,d]) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy$$

UWAGA

Jeżeli (X,Y) jest zmienną losową ciągłą o gęstości f, to dystrybuanta ma postać:

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv$$

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH

UWAGA *(rozkłady brzegowe zmiennej ciągłej)*

W przypadku ciągłej zmiennej losowej (X,Y) rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y są charakteryzowane przez odpowiednie funkcje gęstości:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Funkcja gęstości f_1 opisuje rozkład zmiennej losowej X,

funkcja gęstości f_2 charakteryzuje rozkład zmiennej losowej Y.

Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową typu ciągłego. Zmienne losowe X i Y są niezależne, gdy

UWAGA *(gęstości warunkowe)*

Jeżeli (X,Y) jest dwuwymiarową zmienną losową ciągłą o gęstościach rozkładów brzegowych f_1 i f_2, to funkcja

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

jest gęstością rozkładu zmiennej losowej X przy warunku, że zmienna losowa Y przyjmuje wartość y,

natomiast funkcja

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

jest gęstością rozkładu zmiennej losowej Y przy warunku $X=x$.

DEFINICJA *(zmienne losowe niezależne)*

Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową typu ciągłego. Zmienne losowe X i Y są niezależne, gdy

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

UWAGA

Jeżeli zmienne losowe X i Y są niezależne, to wówczas ich rozkłady warunkowe nie zależą od warunku i są identyczne z rozkładami brzegowymi zmiennych losowych X i Y, tzn.

$$f(x \mid y) = f_1(x),$$

$$f(y \mid x) = f_2(y),$$

Tomasz Wójtowicz, WZ AGH